Олимпиада Школы ПМФ 2012

Московский физико-технический институт

8 июля 2012 г., 9:15–14:00

1 Фотоэффект (В.Г. Яржемский)

Методом фотоэлектронной спектроскопии исследуется графен: измеряется химический сдвиг энергии связи уровня C 1s (энергия связи E_c=285 эВ). Используется монохроматизированное излучение $MgK\alpha$ ($h\nu = 1487$ эВ). Анализатор энергий электронов состоит из двух концентрических частей сферы с радиусами 59,7 см и 60 см. Электроны вылетают между сферами, которые образуют собой конденсатор. При измерении напряжение на конденсаторе подбирается так, чтобы электроны пролетали между обкладками. Из подобранного напряжения вычисляется кинетическая энергия. Измерение производят в двух режимах.
1. Измеряется кинетическая энергия фотоэлектронов вылетающих из образца прямо в анализатор;
2. Фотоэлектроны сначала замедляются разностью потенциалов 1100 В, а затем измеряется кинетическая энергия.
Оценить погрешность при измерении энергии связи E_c в этих двух случаях.

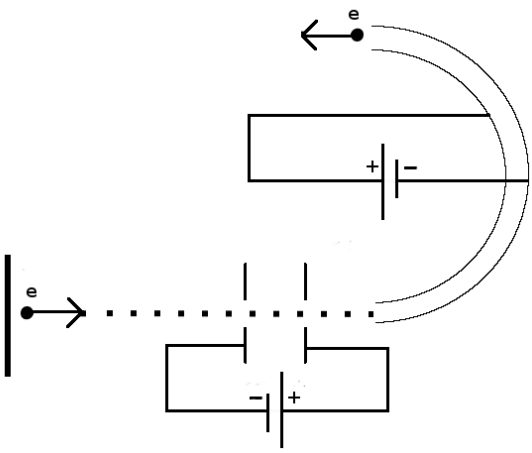


Рис. 1: К задаче 1

2 Частица в поле провода (А.С. Чирцов)

По бесконечно длинному проводу радиуса r течет ток J. Линейная плотность заряда в проводе — λ. С поверхности провода из состояния покоя срывается электрон массы m с зарядом q. Найдите зависимость модуля скорости $|\vec{v}|$ от расстояния до оси проводника R. Формулы для полей, создаваемых бесконечно длинным проводом, и силы, действующей на частицу, в системе СГС:

$$E = \frac{2\lambda}{R}, \qquad B = \frac{2J}{cR}, \qquad \vec{F} = q\vec{E} + \frac{q}{c}\left[\vec{v} \times \vec{B}\right],$$

где c — скорость света.

3 Сумма возрастающей геометрической прогрессии (М.Г. Иванов)

Пусть x и y — целые числа,

$$x - y = 2^N K,$$

где $N \geqslant 0$ и K — целые, причем K — нечетное.

Определим «расстояние» $L(x, y)$ между x и y как

$$L(x, y) = 2^{-N}, \qquad L(x, x) = 0.$$

Используя введенное «расстояние», мы можем определить понятие предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \ \exists n_0 \ \ \forall n \geq n_0 \ \ L(x_n, x_0) < \epsilon.$$

Найти

$$\sum_{k=0}^{\infty} 7 \cdot 8^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 7 \cdot 8^k = 7 + 7 \cdot 8 + 7 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^3 + \cdots .$$

4 Проблема парковки (А.В. Гасников)

Согласно плану в районе строятся несколько домов (с известными координатами (x_i, y_i)), в каждом из которых будет проживать определенное количество человек (заданные числа m_i). Нужно так построить парковку, чтобы сумма расстояний, пройденных каждым человеком до парковки, была минимальной.

а) Где нужно построить парковку, если есть (в общем положении) три одинаково заселенных дома?

б) Верно ли, что если все дома не лежат на одной прямой, то у задачи ровно одно решение?

Для «решения» задачи о минимальной сумме расстояний можно воспользоваться следующей физической системой: на плоский (горизонтальный) фанерный лист кладется карта района и в центрах домов просверливаются маленькие дырочки. Через дырочки продеты нерастяжимые невесомые нити, к которым прикреплены грузики с весом, пропорциональным количеству жителей в соответствующем доме. Начала всех нитей завязаны в один узел (ненулевой массы). Будем считать узел достаточно большим: он не будет пролезать в дырочки. Заметим, что вся система находится в однородном поле силы тяжести Земли, перпендикулярном плоскости фанерного листа. При условии, что все дырочки не лежат на одной прямой докажите, что если отпустить все грузики, узел «придёт» через некоторое время к точке с минимальной суммой расстояний (формализуйте точнее, что будет происходить). Может ли узел застрять в вершине? Трение узла о поверхность фанеры считайте пренебрежимо малым.

5 Суперструны (В.В. Брагута)

Одним из удивительных свойств сильного взаимодействия является свойство линейности и параллельности траекторий Редже. Это свойство состоит в следующем: если на оси X отложить квадрат массы мезонов, а на оси Y внутренний момент количества движения мезонов, то с хорошей точностью легкие мезоны ложатся на множество параллельных между собой линий (см. Рисунок). В рамках струнной модели мезонов с натяжением струны **k**, считая массу кварков равной нулю и пренебрегая деформацией струны, подтвердить линейность траекторий Редже и вычислить наклон этих траекторий. Безмассовые частицы всегда движутся со скоростью света c. Релятивистские эффекты не учитывать. Момент импульса точечной частицы:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

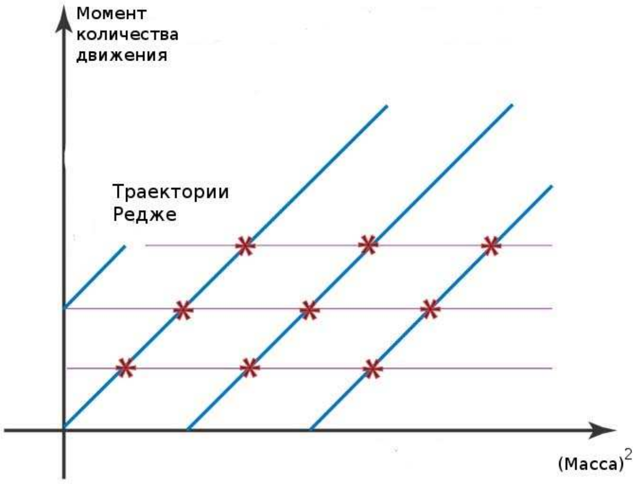


Рис. 2: К задаче 5

6 Задача поиска логических закономерностей в данных (К.В. Воронцов)

Имеется 5 объектов класса $Y = 0$ и 7 объектов класса $Y = 1$. Каждый объект описан 8 признаками `А`, `Б`, `В`, `Г`, `Д`, `Е`, `Ж`, `З`:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	Y
1	1	0	1	0	0	0	1	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1
0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1

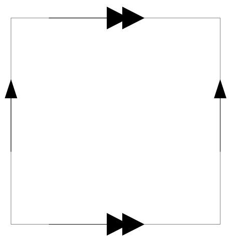
Представить Y в виде дизъюнкции (логическое "ИЛИ") трех конъюнкций (логическое "И") , каждая из которых состоит из двух признаков. Сколько существует таких представлений? Сколько существует закономерностей, имеющих вид конъюнкции из двух признаков?

Закономерностью называется такая функция от признаков объекта, которая принимает значение 0 на всех объектах класса 0 и значение 1 на некоторых объектах класса 1.

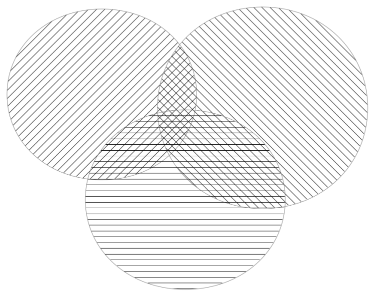
7 Склейка бублика (М.Г. Иванов)

Какое минимальное количество кусков резиновой пленки без дырок нужно, чтобы полностью обклеить поверхность тора (бублика) при условии, что куски склеиваются между собой внахлест, причем кусок не может склеиваться сам с собой или касаться сам себя? Докажите, что предложенное вами число действительно минимально. Поверхность тора можно представить как квадрат, у которого склеены стороны (см. Рисунок). Изобразите на таком квадрате предложенное вами покрытие.

На куске резиновой пленки без дырок (топологически эквивалентном кругу) любую замкнутую кривую можно непрерывно стянуть в точку.



Стороны квадрата склеиваются так, что соответствующие стрелки совпадают



Так выглядит склейка внахлест

8 Функция Ван дер Вардена (Д.А. Шабанов)

Согласно *знаменитой теореме Ван дер Вардена* для любых натуральных чисел $n \geqslant 3$ и $r \geqslant 2$ найдется такое число $N = N(n, r)$, что в любой раскраске множества натуральных чисел $\{1, \ldots, N\}$ в r цветов найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины n. *Функцией Ван дер Вардена* $W(n, r)$ называется минимальное число N с такими свойствами, т.е.

$$W(n, r) = \min\{N : \text{ в любой раскраске множества } \{1, \ldots, N\} \text{ в } r \text{ цветов}$$

$$\text{найдется одноцветная арифметическая прогрессия длины } n.\}$$

Получите, как можно более лучшую, нижнюю оценку $W(n, r)$.