Задачи олимпиады Школы ПМФ 2013 (08.07.2013; http://Leto.mipt.ru/)

Задача 1 (Лосев А.С.)

Рассмотрим двумерное пространство-время (одна временная координата t и одна прорстранственная координата x). Пусть действие для скалярного поля $\phi(x,t)$ имеет вид:

$$S[\phi(t,x)] = \int\int \left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \lambda^2\phi^2 \right) dx\,dt,$$

где $\lambda > 0$ — вещественное число.

а) Проварьируйте действие и найдите уравнения поля $\phi(t,x)$.

Скалярное поле $\phi(x,t)$ представляет собой потенциал (потенциальную энергию) двух взаимодействующих частиц. Если поместить одну из частиц в начало координат, то вы можете считать, что x — расстояние между частицами ($x > 0$). (В точках, где находятся частицы найденное уравнение поля не будет выполняться.)

б) Найдите силу взаимодействия двух частиц при условии, что скалярное поле не зависит от времени ($\partial\phi/\partial t = 0$) и при бесконечном удалении частиц друг от друга сила взаимодействия обращается в 0.

Примечание. Что такое вариация действия. Если задано действие $S[\phi(t,x)]$, то уравнение поля может быть получено из условия равенства нулю вариации действия $\delta S = 0$ при произвольной вариации поля $\delta\phi(t,x)$ (вариация поля — функция от t и x, *которая обращается в нуль вместе со своими производными на границах области интегрирования*). Вариация действия может быть определена двумя эквивалентными способами: как приращение действия при изменении поля на $\delta\phi(t,x)$, взятое с точностью до линейных членов по $\delta\phi$, либо через производную по параметру

$$\delta S = S[\phi + \delta\phi] - S[\phi] + o(\delta\phi), \qquad \delta S = \frac{d}{d\alpha} S[\phi + \alpha\cdot\delta\phi]\bigg|_{\alpha=0}.$$

Вариация действия может быть приведена к виду (обычно, чтобы привести вариацию к такому виду, приходится интегрировать по частям)

$$\delta S = \int\int F\cdot\delta\phi\cdot dt\,dx.$$

Здесь F — некоторое выражение не зависящая от $\delta\phi$, уравнение поля имеет вид $F = 0$.

Задача 2 (Вайнер Ю.Г.)

Частица является наночастицей, если существенная доля атомов (например, половина) расположена на поверхности. Оцените максимальное число атомов в наночастице, форма которой близка к сферической (или кубической). Ответ обоснуйте.

Задача 3 (Протасов В.Ю.)

Докажите, что для произвольного выпуклого семиугольника, все выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника имеют общую точку.

Примечание. Теорема Хелли. Предположим, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выпуклые множества в d-мерном евклидовом пространстве, такие, что что пересечение любых $d+1$ из них непусто. Тогда пересечение *всех* подмножеств из этого семейства непусто.

Задача 4 (Симаков С.С.)

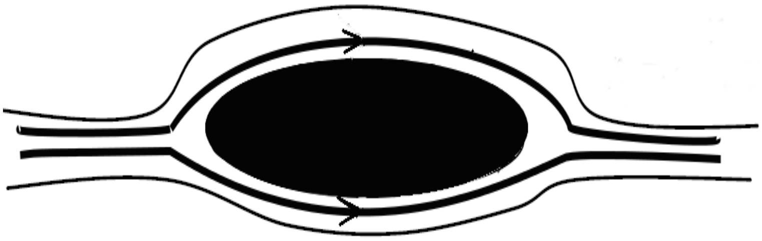
Заменить системы из двух сосудов с радиусами $r_1 = 10$ мм, $r_2 = 1,4$ мм и длинами $l_1 = 10$ мм, $l_2 = 10$ мм одним так, чтобы сопротивление току крови и объем интегрального сосуда были такими же, как и у системы.

Сосуды соединены параллельно (см. рисунок).

Сопротивление току крови R — это отношение перепада давления между концами сосуда P и потока крови Q

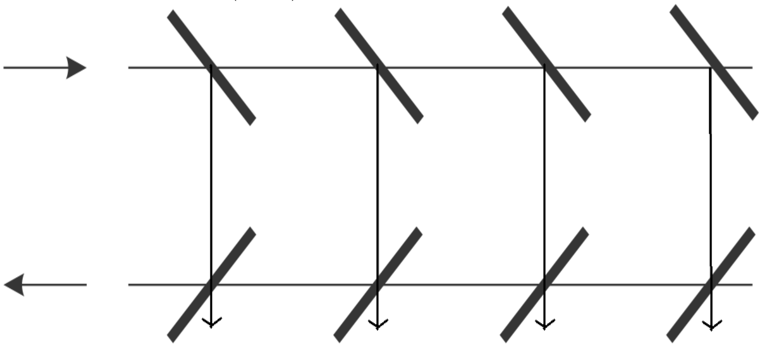
$$R = P/Q.$$

Считать, что эластичностью стенок сосудов можно пренебречь. При фиксированной длине сосуда и при фиксированном перепаде давлений поток крови $Q \sim r^4$. Перепад давлений между концами сосуда $P \sim Ql$.



Задача 5 (Львовский А.И.)

Найти коэффициент отражения бесконечной системы светоделительных пластинок, изображённой на рисунке (см. Рис. 3). Коэффициент отражения (по интенсивности) верхнего ряда пластинок $R_1 = 0.7$, нижнего – $R_2 = 0.3$. Считать светоделительные пластинки бесконечно тонкими. Между каждой парой пластинок рамещается целое число длин волн света. При отражении света от пластинки фаза меняется на половину периода (на π).



Задача 6 (Махов С.А.)

При каких значениях параметра a следующая система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} 4x_2 = a - x_1^2 \\ 4x_3 = a - x_2^2 \\ 4x_4 = a - x_3^2 \\ 4x_1 = a - x_4^2 \end{cases} \tag{1}$$

Задача 7 (Кубышкин А.В.)

Какое время должен облучать холодный метеорит орбитальный лазер с мощностью $P = 10$ МВт, чтобы: а) полностью испарить его? б) свести с опасной орбиты, сообщив ему дополнительную скорость 1 км/с? Массу метеорита принять равной $m = 1$ т, материал — железо. Удельная теплота плавления железа $\lambda = 250$ кДж/кг, температура плавления $T_m = 1800$ K, удельная теплота парообразования $L = 6,25$ МДж/кг, температура кипения $T_b = 3100$ K, удельная теплоемкость $C \approx 500$ Дж/кг/K, атомарная масса железа $A = 56$, постоянная Больцмана $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}$Дж/К. Считайте, что луч лазера сфокусирован так, что его диаметр меньше диаметра метеорита.

Задача 8 (Кубышкин А.В.)

На плоской Земле на каком расстоянии железнодорожные рельсы сходятся (если смотреть невооружённым глазом)? Угловая разрешающая способность фотокамеры или телескопа (дифракционный предел) $\delta\phi = \lambda/D$, где λ — длина волны, а D — диаметр объектива. Для видимого света $\lambda \approx 500$ нм. Остальные параметры оцените исходя их жизненного опыта.

Решения задач олимпиады Школы ПМФ 2013 (08.07.2013)

Задача 1. Решение

Рассмотрим действие S на интервале $x_a < x < x_b$, $t_a < t < t_b$.

$$S = \int_{t_a}^{t_b}\int_{x_a}^{x_b}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \lambda^2\phi^2\right)dxdt \tag{2}$$

Поскольку поле ϕ не зависит от времени, то

$$S = \int_{x_a}^{x_b}\left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \lambda^2\phi^2\right)dx\Delta t, \tag{3}$$

где $\Delta t = t_b - t_a$. Рассмотрим изменение исходного действия S при добавлении поля ϕ на произвольную добавку $\delta\phi$, такую что на концах интервала добавка обращается в 0 ($\delta\phi(x_a, t_a) = \delta\phi(x_b, t_b) = 0$):

$$\delta S = S(\phi + \delta\phi) - S(\phi) = -2\int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x} + \lambda^2\phi\delta\phi\right)dx\Delta t. \tag{4}$$

Воспользовавшись, формулой интегрирования по частям: $\int_y^z udv = uv|_y^z - \int_y^z vdu$, получим:

$$\int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\right)dx = \delta\phi\frac{\partial\phi}{\partial x}|_{x_a}^{x_b} - \int_{x_a}^{x_b}\delta\phi\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}dx. \tag{5}$$

Поскольку изначально $\delta\phi(x_a) = \delta\phi(x_b) = 0$, то имеем:

$$\delta S = 2\int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \lambda^2\phi\right)\delta\phi dx\Delta t. \tag{6}$$

Согласно вариационному принципу классическая траектория частицы должна удовлетворять условию $\delta S = 0$ при произвольных вариациях $\delta\phi$, обращающихся в 0 на концах интервала. Отсюда следует, что подинтегральное выражение 6 обращается в 0. Таким образом, вариация действия приводит к уравнению:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \lambda^2\phi = 0. \tag{7}$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\phi(x) = C_1\exp(-\lambda x) + C_2\exp(\lambda x), \tag{8}$$

где C_1, C_2 – некоторые постоянные, зависящие от постановки задачи. Для того чтобы потенциал $\phi(x)$ был конечен при удалении частиц друг от друга, т.е. при $x \to +\infty$ должно выполняться условие: $C_2 = 0$.
Сила действующая на каждую из частиц определяется, как производная потенциала с обратным знаком: $\partial\phi(x)/dx = \lambda C_1\exp(-\lambda x)$.
Отсюда следует результат: с увеличением расстояния сила, действующая на частицы спадает экспоненциальным образом.
Если бы поле зависело от времени, то мы бы имели следующее волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \lambda^2\phi = 0. \tag{9}$$

Задача 2. Решение

Пусть a — характерное межатомное расстояние. Для сферы отношение поверхностного слоя толщины a к остальному объёму всей сферы радиуса R. обозначим $r = R - a$

$$\frac{\frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{4\pi}{3}(R-a)^3}{\frac{4\pi}{3}(R-a)^3} = \frac{R^3 - (R-a)^3}{(R-a)^3} = \frac{(r+a)^3 - r^3}{r^3} = \frac{r^3 + 3r^2a + 3ra^2 + a^3 - r^3}{r^3} = \frac{3r^2a + 3ra^2 + a^3}{r^3} \approx \frac{3a}{r}$$

Если отношение порядка 1, то $r \approx 3a$, $R \approx 4a$. Общий объём сферы радиуса $R = 4a$

$$V = \frac{4\pi}{3}R^3 = \frac{4^4\pi}{3} \approx 4^4a^3 = 256a^3$$

Объём на 1 атом — a^3, так что число атомов в таком кластере порядка $2^8 = 256$.

Для кубической частицы с ребром L общий объём — L^3, объём внутренней части (кубик с ребром $l = L - 2a$)— $l^3 = (L-2a)^3$. Отношение поверхностного слоя к внутреннему объёму

$$\frac{L^3 - (L-2a)^3}{(L-a)^3} = \frac{(l+2a)^3 - l^3}{l^3} = \frac{3l^2 2a + \dots}{l^3} \approx \frac{6a}{l}$$

Если это отношение порядка 1, то $l \approx 6a$, $L \approx 8a$. Общий объём частицы — 8^3a^3, число атомов — $8^3 = 2^9 = 512$.

Как видим, общее число частиц при обоих способах оценки различается не сильно.

Задача 3. Решение

Поскольку Теорема Хелли дана в условиях задачи мы можем воспользоваться ей без доказательства.

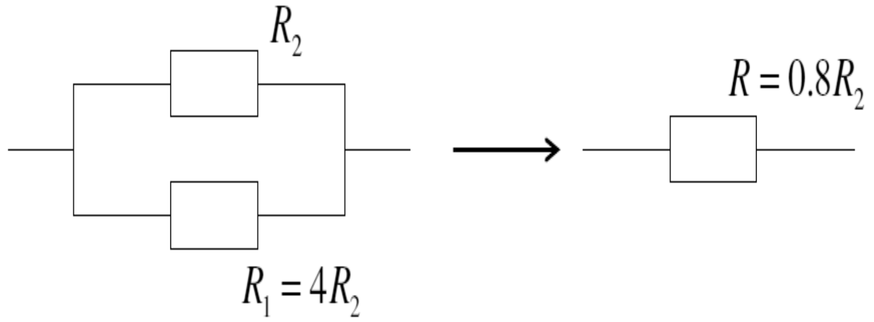
1) Условие выпуклости пятиугольников в данной задаче является излишним, оно может быть выведено из выпуклости 7-угольника. Можно показать, что любой 5-угольник с вершинами в вершинах выпуклого 7-угольника является выпуклым. Легко показать, что по любым 5 вершинам выпуклого 7-угольника может быть построен выпуклый 5-угольник. Далее показывается, что любая другая замкнутая ломанная, построенная по тем же 5 вершинам будет содержать самопересечения.

2) Надо показать, что любые 3 таких 5-угольника имеют непустое пересечение, т.е. хотя бы одну общую точку. Легко показать, что такой точкой является одна из вершин. У двух 5-угольников совпадает не менее 3-х вершин. 3-й 5-угольник содержит все вершины 7-угольника, кроме двух, а значит он обязательно содержит одну из общих вершин двух первых 5-угольников.

3) Применяем Теорему Хелли и получаем, что все такие 5-угольники имеют непустое пересечение, любая точка этого пересечения — общая точка всех таких 5-угольников.

Задача 4. Решение

Эквивалентная электрическая цепь имеет вид двух параллельно соединённых резисторов (см. рис.).



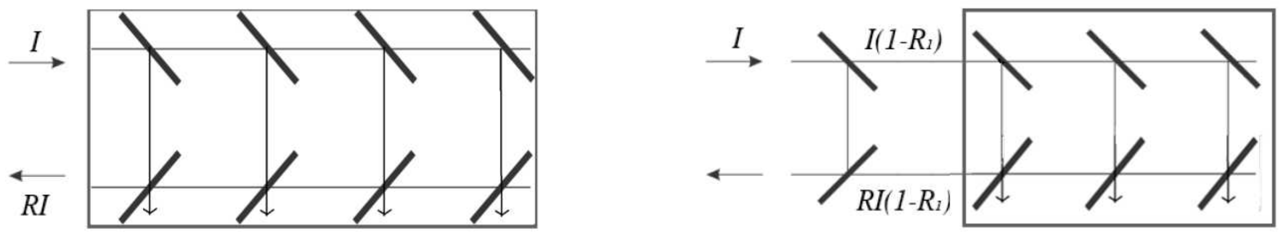
Радиус и длину результирующего сосуда можно найти из системы:

$$\begin{cases} R = 0.8R_2 \\ V = V_1 + V_2 \end{cases} \to \begin{cases} \frac{8l\mu}{\pi r^4} = 0.8\frac{8l_2\mu}{\pi r_2^4} \\ \pi r^2 l = \pi r_1^2 l_1 + \pi r^2 l_2 \end{cases} \to \begin{cases} l = 0.8 r^4 \frac{l_2}{r_2^4} \\ 0.8 r^6 \frac{l_2}{r_2^4} = r_1^2 l_1 + r_2^2 l_2 \end{cases} \tag{10}$$

Отсюда ответ: $r = \sqrt[6]{15}$ мм≈ 1.6 мм, $l = 2(\sqrt[3]{15})^2 \approx 12.2$ мм.

Задача 5. Решение

Заметим, что поскольку цепочка бесконечная, то из неё можно исключить один из блоков, и общий коэфициент отражения не изменится. Таким образом, схемы, представленные на рисунке, эквивалентны.



Также отметим, что поскольку по условию расстояние между пластинками составляет целое число длин волн, то набег фаз всех волн будет кратен 2π и его можно опустить. При отражении от пластинок происходит сдвиг фазы волны на π. Поскольку каждый пучок перед интерференцией с другими пучками отражается от пластинок чётное число раз, то сдвиг по фазе при отражении также кратен 2π и также может быть опущен.

Введем обозначения: $r_1 = \sqrt{R_1}$, $r_2 = \sqrt{R_2}$ — коэффициенты отражения от пластинок по амплитуде поля, $t_1 = \sqrt{1 - R_1}$, $t_2 = \sqrt{1 - R_2}$ - коэффициенты пропускания по амплитуде.

Пусть $R = r^2$ — коэффициент отражения всей системы. И на систему падает световая волна с напряжённостью E.

После взаимодействия с первым зеркалом напряжённость прошедшего пучка будет составлять $E_1 = t_1 E$ а отраженного — $E_2 = r_1 E$. Прошедший пучок далее заходит в систему, полученную из исходной вычитанием одной пары пластинок и выходит с напряжённостью $E_2 = r t_1 E$.

Далее оба пучка сбиваются на втором зеркале. При этом, пучок прошедший систему будет иметь напряжённость поля $E_2 = t_2 r t_1 E$, а пучок отразившийся от пары первых зеркал - $E_1 = r_2 r_1 E$.

Поскольку набег фаз на каждом из шагов системы кратен 2π, то пришедшие на выход пучки будут синфазны, а значит, их напряжённости сложатся. Получаем напряжённость выходной волны $E_{out} = E_1 + E_2 = r_1 r_2 E + r t_1 t_2 E$.

Вспомним, что итоговая система должна дать коэффициент отражения r, а значит, $E_{out} = rE$. Получим уравнение $rE = r_1 r_2 E + r t_1 t_2 E$.

В итоге имеем для коэффициента отражения по интенсивности:

$$R = |r|^2 = \left(\frac{r_1 r_2}{1 - t_1 t_2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{R_1 R_2}}{1 - \sqrt{(1 - R_1)(1 - R_2)}}\right)^2 = \frac{0,21}{1,21 - 2\sqrt{0,21}} \approx 0.716$$

Задача 6. Решение

Пусть $f(x) = \frac{a - x^2}{4}$. Зададим последовательность x^i, для которой $x_{i+1} = f(x^i)$. Если $x_5 = x_1$, то мы получаем решение системы. Это решение единственно только тогда, когда $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$. В противном случае циклической перенумерацией переменных x_k мы получим новое решение. Таким образом, единственность решения системы сводится к единственности решения уравнения

$$x = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad 4x = a - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x - a = 0.$$

Условие единственности решения квадратного уравнения — равенство нулю дискриминанта:

$$4^2 + 4a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -4.$$

Задача 7. Решение

а) из уравнения теплового баланса $P\tau = (CT_b + \lambda + L)m$ следует

$$\tau \approx \frac{10^3}{10^7} \underbrace{(500 \times 3 \cdot 10^3 + 6,5 \cdot 10^6)}_{\approx 10^7} \text{с} = 10^3 \text{с}.$$

б) можно заметить, что скорость теплового движения молекул железа при кипении

$$v = \sqrt{(3k_B T/M)} \approx \sqrt{\frac{3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-23} \cdot 3 \cdot 10^3}{\frac{56 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{23}}}} \text{м/с} \approx 10^3 \text{м/с} = 1\text{км/с},$$

поэтому для придания такой же скорости оставшейся части метеорита (реактивное движение) нужно испарить примерно половину. Поэтому ответом служит $\tau/2 = 500$ с.

Задача 8. Решение

«Когда рельсы сливаются» угловое расстояние между ними становится равным разрешению глаза.

$$\frac{a}{L} = \frac{\lambda}{D} \quad \Leftrightarrow \quad L = \frac{Da}{\lambda}.$$

Расстояние между рельсами $a \approx 2$м, диаметр зрачка человека $D \approx 5$мм. Получаем

$$L = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{5 \cdot 10^{-7}} \text{м} = 2 \cdot 10^4 \text{м} = 20\text{км}.$$