Задачи олимпиады Школы ПМФ 2013 (08.07.2013; http://Leto.mipt.ru/)

Задача 1 (Лосев А.С.)

Рассмотрим двумерное пространство-время (одна временная координата t и одна прорстранственная координата x). Пусть действие для скалярного поля $\phi(x,t)$ имеет вид:

$$S[\phi(t,x)] = \int\int \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \lambda^2\phi^2 \right) dx\, dt,$$

где $\lambda > 0$ — вещественное число.

а) Проварьируйте действие и найдите уравнения поля $\phi(t,x)$.

Скалярное поле $\phi(x,t)$ представляет собой потенциал (потенциальную энергию) двух взаимодействующих частиц. Если поместить одну из частиц в начало координат, то вы можете считать, что x — расстояние между частицами ($x > 0$). (В точках, где находятся частицы найденное уравнение поля не будет выполняться.)

б) Найдите силу взаимодействия двух частиц при условии, что скалярное поле не зависит от времени ($\partial\phi/\partial t = 0$) и при бесконечном удалении частиц друг от друга сила взаимодействия обращается в 0.

Примечание. Что такое вариация действия. Если задано действие $S[\phi(t,x)]$, то уравнение поля может быть получено из условия равенства нулю вариации действия $\delta S = 0$ при произвольной вариации поля $\delta\phi(t,x)$ (вариация поля — функция от t и x, *которая обращается в нуль вместе со своими производными на границах области интегрирования*). Вариация действия может быть определена двумя эквивалентными способами: как приращение действия при изменении поля на $\delta\phi(t,x)$, взятое с точностью до линейных членов по $\delta\phi$, либо через производную по параметру

$$\delta S = S[\phi + \delta\phi] - S[\phi] + o(\delta\phi), \qquad \delta S = \frac{d}{d\alpha} S[\phi + \alpha\cdot\delta\phi]\bigg|_{\alpha=0}.$$

Вариация действия может быть приведена к виду (обычно, чтобы привести вариацию к такому виду, приходится интегрировать по частям)

$$\delta S = \int\int F\cdot\delta\phi\cdot dt\, dx.$$

Здесь F — некоторое выражение не зависящая от $\delta\phi$, уравнение поля имеет вид $F = 0$.

Задача 2 (Вайнер Ю.Г.)

Частица является наночастицей, если существенная доля атомов (например, половина) расположена на поверхности. Оцените максимальное число атомов в наночастице, форма которой близка к сферической (или кубической). Ответ обоснуйте.

Задача 3 (Протасов В.Ю.)

Докажите, что для произвольного выпуклого семиугольника, все выпуклые пятиугольники с вершинами в вершинах семиугольника имеют общую точку.

Примечание. Теорема Хелли. Предположим, что $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — выпуклые множества в d-мерном евклидовом пространстве, такие, что что пересечение любых $d+1$ из них непусто. Тогда пересечение *всех* подмножеств из этого семейства непусто.

Задача 4 (Симаков С.С.)

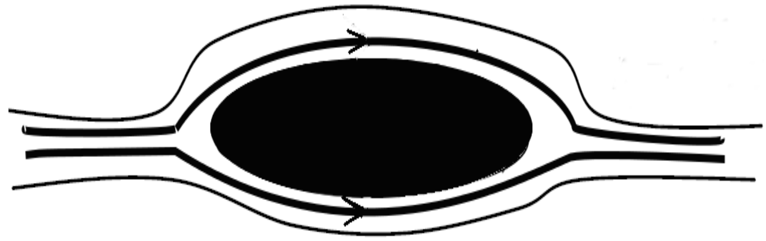
Заменить системы из двух сосудов с радиусами $r_1 = 10$ мм, $r_2 = 1{,}4$ мм и длинами $l_1 = 10$ мм, $l_2 = 10$ мм одним так, чтобы сопротивление току крови и объем интегрального сосуда были такими же, как и у системы.

Сосуды соединены параллельно (см. рисунок).

Сопротивление току крови R — это отношение перепада давления между концами сосуда P и потока крови Q

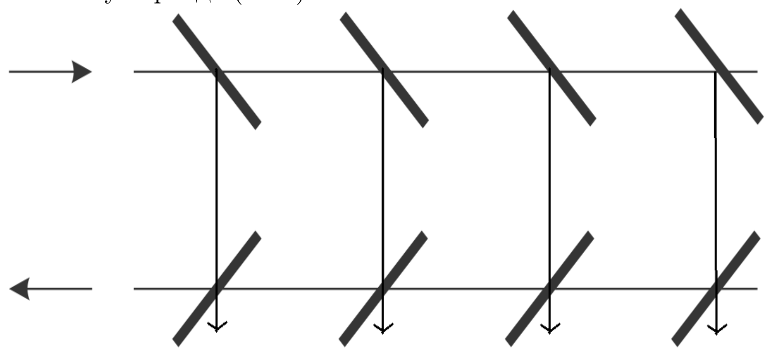
$$R = P/Q.$$

Считать, что эластичностью стенок сосудов можно пренебречь. При фиксированной длине сосуда и при фиксированном перепаде давлений поток крови $Q \sim r^4$. Перепад давлений между концами сосуда $P \sim Ql$.



Задача 5 (Львовский А.И.)

Найти коэффициент отражения бесконечной системы светоделительных пластинок, изображённой на рисунке (см. Рис. 3). Коэффициент отражения (по интенсивности) верхнего ряда пластинок $R_1 = 0.7$, нижнего – $R_2 = 0.3$. Считать светоделительные пластинки бесконечно тонкими. Между каждой парой пластинок рамещается целое число длин волн света. При отражении света от пластинки фаза меняется на половину периода (на π).



Задача 6 (Махов С.А.)

При каких значениях параметра a следующая система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} 4x_2 = a - x_1^2 \\ 4x_3 = a - x_2^2 \\ 4x_4 = a - x_3^2 \\ 4x_1 = a - x_4^2 \end{cases} \tag{1}$$

Задача 7 (Кубышкин А.В.)

Какое время должен облучать холодный метеорит орбитальный лазер с мощностью $P = 10$ МВт, чтобы: а) полностью испарить его? б) свести с опасной орбиты, сообщив ему дополнительную скорость 1 км/с? Массу метеорита принять равной $m = 1$ т, материал — железо. Удельная теплота плавления железа $\lambda = 250$ кДж/кг, температура плавления $T_m = 1800$ K, удельная теплота парообразования $L = 6,25$ МДж/кг, температура кипения $T_b = 3100$ K, удельная теплоемкость $C \approx 500$ Дж/кг/К, атомарная масса железа $A = 56$, постоянная Больцмана $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}$Дж/К. Считайте, что луч лазера сфокусирован так, что его диаметр меньше диаметра метеорита.

Задача 8 (Кубышкин А.В.)

На плоской Земле на каком расстоянии железнодорожные рельсы сходятся (если смотреть невооружённым глазом)? Угловая разрешающая способность фотокамеры или телескопа (дифракционный предел) $\delta\phi = \lambda/D$, где λ — длина волны, а D — диаметр объектива. Для видимого света $\lambda \approx 500$ нм. Остальные параметры оцените исходя их жизненного опыта.